مرحله‌ی دوم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

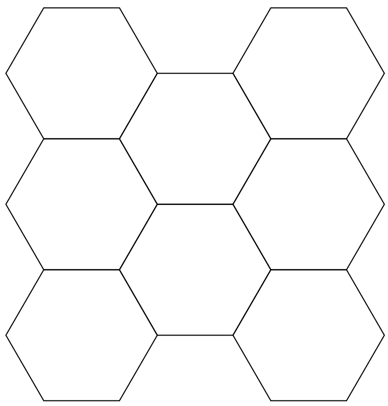
- زمان آزمون ۲۰۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سؤال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتمن کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۲ تا ۲۰ در دسته‌های چند سؤالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

۱ تمام $۱۰^{۳}$ سه‌تایی مرتب (a, b, c) از مجموعه‌ی اعداد $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ را در نظر بگیرید. این ۱۰۰۰ سه‌تایی مرتب در مجموع ۳۰۰۰ عدد دارند. از هر سه‌تایی مرتب بزرگ‌ترین عدد (یا اعداد) را نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم. برای مثال از سه‌تایی مرتب $(۱, ۲, ۳)$ اعداد ۱ و ۲ و از سه‌تایی مرتب $(۱, ۲, ۲)$ عدد ۱ حذف می‌شوند. مجموع اعداد باقی‌مانده چقدر است؟

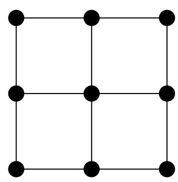
۱) ۷۷۷۸ ۲) ۸۳۲۵ ۳) ۹۰۷۵ ۴) ۱۰۲۵ ۵) ۸۷۷۵

۲ می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را در خانه‌های شکل زیر بنویسیم، طوری که اعداد هر دو خانه‌ی مجاور (دارای ضلع مشترک) نسبت به هم اول باشند. به چند طریق این کار ممکن است؟



۱) ۴۳۲ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۱۶ ۴) ۱۴۴ ۵) ۵۷۶

۳ به چند طریق می‌توان یال‌های گراف زیر را جهت‌دهی کرد، طوری که دور جهت‌دار تشکیل نشود؟



۱) ۲۳۹۸ ۲) ۱۶۶۰ ۳) ۲۷۲۲ ۴) ۵۷۶ ۵) ۵۰۸

۴ در یک جدول ۸×۸ به هشت خانه که هیچ دو تا از آن‌ها هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند، **قطر پراکنده** می‌گوییم. به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول ۸×۸ را با اعداد ۰ و ۱ پر کرد طوری که هر قطر پراکنده‌ی آن دقیقن چهار عدد ۱ داشته باشد؟

۱) ۴۹۰۰ ۲) ۰ ۳) $۸!$ ۴) ۱۴۰ ۵) ۷۰

۵ هشت مسافر در بازرسی بدنی یک فرودگاه به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۸ در صف ایستاده‌اند. **سلطان** مسئول بازرسی بدنی است. او هر بار فرد جلوی صف را بازرسی بدنی می‌کند، سپس به او اجازه می‌دهد از در وارد سالن فرودگاه شود. سلطان تنهاست و در هر لحظه می‌تواند فقط یک نفر را بازرسی بدنی کند. بنابراین در حین بازرسی هر نفر، ممکن است تعدادی (که می‌تواند صفر هم باشد) از افراد صف به ترتیب و بدون بازرسی وارد سالن شوند.

برای مثال فرض کنید سلطان در حال بازرسی فرد شماره ۱ است. در این حین ممکن است افراد ۲ و ۳ به ترتیب از در وارد سالن شوند. سپس فرض کنید بازرسی فرد شماره ۱ تمام شود و او از در سالن عبور کند. سلطان پس از این کار به سراغ بازرسی فرد شماره ۴ می‌رود و روند ادامه پیدا می‌کند.

افراد به چند ترتیب مختلف می‌توانند از در وارد سالن شوند؟

۱) ۱۴۴ ۲) !۸ ۳) ۱۲۸ ۴) !۷ ۵) ۲۵۶

۶ یک گراف کامل پنج رأسی با رأس‌های v_1 تا v_5 داریم. به چند طریق می‌توان یال‌های این گراف را با قرمز و آبی رنگ کرد، طوری که هم زیرگراف پنج رأسی متشکّل از یال‌های آبی و هم زیرگراف پنج رأسی متشکّل از یال‌های قرمز همبند باشد؟

۱) ۲۹۶ ۲) ۵۹۲ ۳) ۴۳۲ ۴) ۸۶۴ ۵) ۲۱۲

۷ فرض کنید S رشته‌ای از ارقام ۰ و ۱ باشد. به این رشته **تجزیه‌ناپذیر** گوییم، اگر رشته‌ی t وجود نداشته باشد که با گذاشتن تعدادی (بیش از یک بار) از آن کنار هم، رشته‌ی S به دست آید. تعداد رشته‌های تجزیه‌ناپذیر ۱۲ رقمی را بیابید.

۱) ۴۰۱۲ ۲) ۴۰۰۲ ۳) ۴۰۲۰ ۴) ۴۰۹۶ ۵) ۴۰۳۲

۸ سلطان می‌خواهد جایگشتی از اعداد ۱ تا ۱۰ بسازد. او در ابتدا عدد ۱ را می‌نویسد. سپس به ازای هر i به ترتیب از ۲ تا ۱۰ عدد i را به شکل زیر به جایگشت اضافه می‌کند:

فرض کنید جایگشت کنونی $\langle \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{i-1} \rangle$ باشد. سلطان عدد i را به احتمال $\frac{1}{2}$ در ابتدای جایگشت، به احتمال $\frac{1}{2^2}$ بین π_1 و π_2، به احتمال $\frac{1}{2^3}$ بین π_2 و π_3، ...و به احتمال $\frac{1}{2^{i-1}}$ بین π_{i-2} و π_{i-1} می‌نویسد. هم‌چنین سلطان به احتمال $\frac{1}{2^{i-1}}$ عدد i را در انتهای جایگشت کنونی (بعد از π_{i-1}) می‌نویسد.

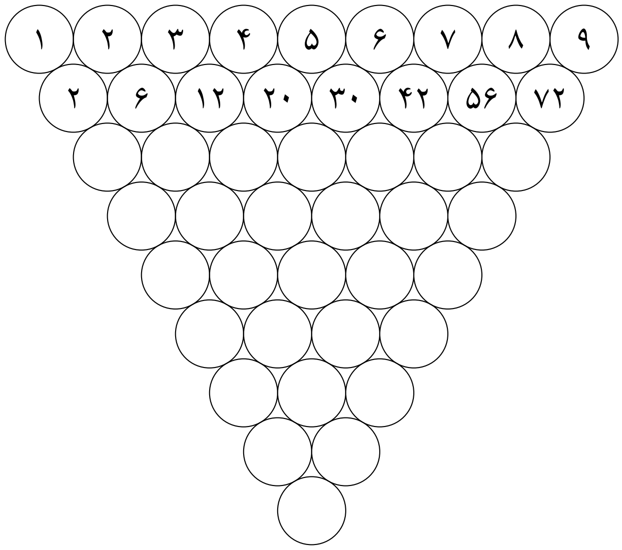
در جایگشت نهایی به دو عدد (نه لزومن متوالی) **وارون** گوییم، اگر عدد بزرگ‌تر قبل از عدد کوچک‌تر آمده باشد. امید ریاضی تعداد زوج‌های وارون را بیابید.

۱) $\binom{9}{2} - \frac{1}{2^9}$ ۲) ۹ ۳) $\frac{\binom{10}{2}}{2} + \frac{1}{2^{10}}$ ۴) $\binom{9}{2} + 1 - \frac{1}{2^9}$ ۵) $\frac{\binom{10}{2}}{2}$

۹ نقی دایره‌ای دارد که ۱۱ انگشتر دور آن چیده شده است. انگشترها از نظر ظاهری شبیه به هم هستند، اما در میان آن‌ها دقیقن دو انگشتر اصل وجود دارد. نقی دستگاهی دارد که در هر مرحله می‌تواند پنج انگشتر متوالی از دایره را به دستگاه نشان بدهد و تعداد انگشترهای اصل در میان این پنج انگشتر را بفهمد. نقی حق ندارد ترتیب انگشترهای دور دایره را عوض کند. او می‌خواهد دست کم یک انگشتر اصل را پیدا کند. نقی به دست کم چند بار استفاده از دستگاه نیاز دارد تا به طور مطمئن بتواند یک انگشتر اصل پیدا کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۱ ۵) ۵

۱۰ در شکل زیر، هر عدد برابر ضرب دو عدد بالایی خود است. اعداد دایره‌های سطر سوم به بعد را در شکل ننوشته‌ایم. عدد پایین‌ترین دایره چند رقم صفر در سمت راست خود دارد؟



۱) ۲۴۰ ۲) ۴۶ ۳) ۷۸ ۴) ۳۵ ۵) ۷۰

۱۱ سلطان اعداد طبیعی ۱ تا n را با قرمز و آبی رنگ کرده است. می‌دانیم هیچ سه عدد هم‌رنگ و متمایزی وجود ندارد که عدد بزرگ‌تر برابر جمع دو عدد دیگر باشد. بیشینه‌ی ممکن برای n چیست؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۷ ۵) ۱۰

در خانه‌های یک جدول 8×8 اعدادی دوبه‌دو متمایز نوشته شده است. دو خانه از جدول را **هماهنگ** گوییم، اگر در زیرجدولی که این دو خانه، دو گوشه‌ی مقابل آن را تشکیل می‌دهند، اعداد کمینه و بیشینه در همین دو خانه باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۲ بیشینه‌ی ممکن تعداد زوج خانه‌های هماهنگ چیست؟

۱) ۳۳۶ ۲) ۷۸۴ ۳) ۴۴۸ ۴) ۵۶۰ ۵) ۱۲۳۲

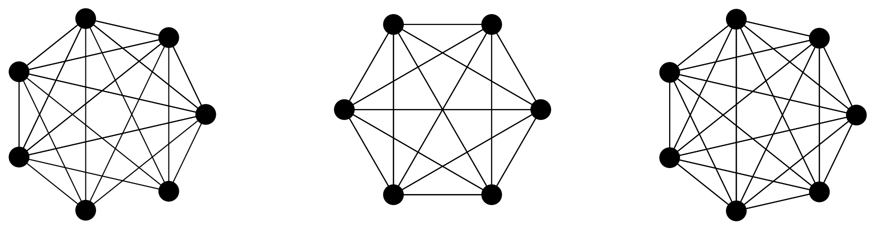
۱۳ کمینه‌ی ممکن تعداد زوج خانه‌های هماهنگ چیست؟

۱) ۱۱۲ ۲) ۴۴۸ ۳) ۲۲۴ ۴) ۱۷۶ ۵) ۵۶

یک گراف ساده در نظر بگیرید که رأس‌های آن با قرمز و آبی رنگ شده‌اند. عمل **سلطان‌پیچ** روی گراف به این شکل انجام می‌شود که یک مجموعه از رأس‌ها مانند S را انتخاب می‌کنیم، سپس رنگ هر رأس خارج از S را که به تعداد فردی رأس از S یال دارد، عوض می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

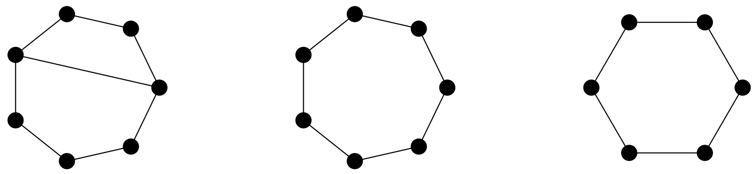
۱۴ فرض کنید در ابتدا تمام رأس‌های گراف‌های زیر قرمز هستند. در کدام گراف‌ها می‌توان با تعدادی عمل سلطان‌پیچ تمام رأس‌ها را آبی کرد؟



گراف (آ)　　گراف (ب)　　گراف (پ)

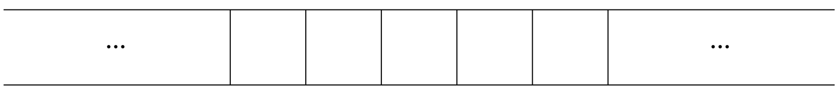
۱) گراف (آ)　۲) هر سه گراف　۳) هیچ کدام　۴) گراف‌های (آ) و (پ)　۵) گراف‌های (ب) و (پ)

۱۵ گراف‌های زیر به ترتیب از راست به چپ $۲^{۶}$، $۲^{۷}$ و $۲^{۷}$ رنگ‌آمیزی اولیه‌ی ممکن دارند. در هر کدام به ترتیب از راست به چپ، به ازای چند رنگ‌آمیزی اولیه می‌توان با تعدادی عمل سلطان‌پیچ تمام رأس‌ها را آبی کرد؟



۱) ۶۴، ۱۲۸، ۱۲۸　۲) ۳۲، ۶۴، ۱۲۸　۳) ۳۲، ۱۲۸، ۹۶　۴) ۶۴، ۶۴، ۱۲۸، ۶۴　۵) ۶۴، ۶۴، ۱۲۸

نواری نامتناهی به شکل زیر داریم:



در ابتدا ۱۰ قورباغه در ۱۰ خانه‌ی متوالی از این نوار قرار دارند. در یک عمل **پرش**، یک قورباغه یکی از دو جهت (چپ یا راست) را انتخاب می‌کند و با حرکت در جهت انتخاب شده، به نخستین خانه‌ی خالی می‌پرد. توجه کنید یک عمل پرش توسط یک قورباغه انجام می‌شود و قورباغه‌ها هم‌زمان نمی‌پرند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ حداقل چند عمل پرش توسط قورباغه‌ها باید انجام شود تا بین هر دو قورباغه دست کم یک خانه‌ی خالی باشد؟

۱) ۹　۲) ۵　۳) ۱۷　۴) رسیدن به چنین حالتی ممکن نیست　۵) ۱۸

۱۷ فرض کنید قورباغه‌ها شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داشته باشند. می‌خواهیم در انتها به وضعیتی برسیم که قورباغه‌ها در همین ۱۰ خانه‌ای قرار بگیرند که در ابتدا قرار دارند، امّا ترتیب شماره‌های‌شان از چپ به راست صعودی باشد. حداقل چند عمل پرش لازم داریم تا به ازای هر ترتیب اولیه بتوانیم کارمان را انجام دهیم؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۹ ۳) ۱۱ ۴) ۲۰ ۵) ۱۰

در سرزمین سلطان نوعی باکتری به نام **مملی** زندگی می‌کند. هر مملی دو کروموزوم دارد. دو مملی می‌توانند با هم ازدواج و تولید مثل کنند. فرزند، از هر والد خود یک کروموزوم را به ارث می‌برد، بنابراین هر زوج حداکثر چهار فرزند متفاوت می‌توانند داشته باشند.
بیماری‌ای در سرزمین سلطان شایع شده که برخی از کروموزوم‌ها آسیب دیده‌اند. تحقیقات پزشکی به موارد زیر رسیده است:

- یک مملی با دو کروموزم آسیب‌دیده، ایدز دارد.
- یک مملی که کروموزم آسیب‌دیده نداشته باشد، ایدز ندارد.
- وضعیت در مورد مملی‌هایی که دقیقن یک کروموزم آسیب‌دیده دارند مشخص نیست، ولی می‌دانیم یا همه‌ی آن‌ها ایدز دارند (که در این صورت به ایدز بیماری **فراگیر** می‌گوییم) و یا هیچ کدام ایدز ندارند.

جدول موروثی دو مملی، جدولی ۲×۲ می‌باشد که هر سطر آن مربوط به یک کروموزوم از مملی اول و هر ستون آن مربوط به یک کروموزوم از مملی دوم است. در هر خانه از جدول، وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن فرزندی که از کروموزم‌های متناظر سطر و ستونش ساخته می‌شود، نوشته می‌شود. به راحتی می‌توانید بررسی کنید که دو جدول موروثی زیر، نامعتبر و غیر ممکن هستند (علامت ✓ به معنی داشتن ایدز و علامت × به معنی نداشتن ایدز است):

×	✓
✓	×

✓	×
×	✓

بنابراین در کل $۲^۴ - ۲ = ۱۴$ جدول موروثی ممکن وجود دارد.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۸ دو مملی با هم ازدواج کرده و چهار فرزند مختلف به وجود آورده‌اند. به ما گفته‌اند دقیقن k تا از این فرزندها ایدز دارند. ما هیچ اطلاعاتی دیگری مانند این که والدین ایدز دارند یا خیر نداریم. به ازای چند مقدار k از ۰ تا ۴ می‌توانیم متوجه شویم ایدز یک بیماری فراگیر است یا خیر؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲ ۵) ۰

۱۹ فرض کنید A و B دو مملی با جدول موروثی T باشند که سطرها مربوط به A و ستون‌ها مربوط به B است. فرض کنید وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن A و B را نمی‌دانیم. اگر با استفاده از جدول بتوانیم وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن هر دوی A و B را بفهمیم، دو امتیاز می‌گیریم؛ اگر بتوانیم فقط وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن یکی از آن‌ها را بفهمیم، یک امتیاز می‌گیریم و اگر هم هیچ کدام را نتوانیم بفهمیم، امتیازی نمی‌گیریم. تمام ۱۴ حالت T را در نظر بگیرید. در مجموع این حالات، چند امتیاز می‌توانیم بگیریم؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۲۰ ۴) ۰ ۵) ۲۸

۲۰ سلطان دستگاهی ساخته که دو مملی از ورودی می‌گیرد و جدول موروثی آن‌ها را تحویل می‌دهد (حتی اگر دو مملی ازدواج نکرده باشند، با فرض ازدواج آن‌ها جدول را می‌سازد). فرض کنید A و B دو مملی با چهار فرزند مختلف و جدول موروثی T باشند. به ازای هر دو فرزند از A و B آن‌ها را به دستگاه می‌دهیم و یک جدول تحویل

می‌گیریم. فرض کنید می‌دانیم هر خانه از T مربوط به کدام فرزند است. به ازای چند حالت از T، با استفاده از جدول موروثی دستگاه و هم‌چنین خود T می‌توانیم فراگیر بودن یا نبودن ایدز را تشخیص دهیم؟ $\binom{4}{2}$

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۰ ۴) ۸ ۵) ۱۴

به نام خدا

آزمون مرحله دوم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

هدیه‌ی معین.. ۲۰ امتیاز

۱- مصطفی برای جشن تولدش، معین را دعوت کرده است. معین تصمیم گرفته کادوی تولد مصطفی را خودش بسازد. به دلیل علاقه‌ی مصطفی به گراف، معین یک گراف ساده‌ی ۲۰۱۸ رأسی با تعدادی توپ (به عنوان رأس) و میله (به عنوان یال) ساخته است.

روز قبل از تولد، معین یادش می‌آید مصطفی فقط گراف‌های ساده‌ای را دوست دارد که درجه‌ی تمام رأس‌ها در آن فرد است. معین می‌خواهد با اضافه کردن تعدادی میله (یال) به گراف کاری کند که درجه‌ی تمام رأس‌ها فرد شود و هم‌چنان گراف به صورت ساده باقی بماند.

او با بررسی گرافش متوجه شد تنها یک روش برای این کار وجود دارد! حداقل تعداد یال‌های ممکن برای گراف معین (قبل از اقدام برای اضافه کردن یال‌ها) را بیابید.

معین حریص... ۲۰ امتیاز

۲- پس از حل مشکل تولد (در مسئله‌ی قبل)، مصطفی برای این که جشن تولد جذابی داشته باشد، یک بازی بین خود، امیر و معین برگزار می‌کند. پیش از شروع تولد، مصطفی $۱۷^۳$ عدد شکلات خریداری کرده و آن را درون یک مکعب $۱۷ \times ۱۷ \times ۱۷$ چیده است (در هر خانه دقیقا یک شکلات). شکلات واقع در سطر x، ستون y و ارتفاع z را با (x, y, z) نشان می‌دهیم. بازی به این صورت است که در آغاز کار، امیر شکلات $(۱,۱,۱)$ را خورده و بازی شروع می‌شود. سپس مصطفی، معین و امیر به نوبت بازی می‌کنند.

مصطفی در نوبت خود می‌تواند شکلات سمت راست یا سمت چپی آخرین شکلات خورده شده را بخورد؛ یعنی اگر (x, y, z) آخرین شکلات خورده شده باشد، می‌تواند $(x + ۱, y, z)$ یا $(x - ۱, y, z)$ را بخورد.

معین می‌تواند شکلات جلو یا عقبی آخرین شکلات خورده شده را بخورد؛ یعنی اگر (x, y, z) آخرین شکلات خورده شده باشد، می‌تواند $(x, y + ۱, z)$ یا $(x, y - ۱, z)$ را بخورد.

امیر می‌تواند شکلات بالا یا پایینی آخرین شکلات خورده شده را بخورد؛ یعنی اگر (x, y, z) آخرین شکلات خورده شده باشد، می‌تواند $(x, y, z + ۱)$ یا $(x, y, z - ۱)$ را بخورد.

اگر کسی نتواند در نوبت خود شکلاتی بخورد، می‌بازد و بازی تمام می‌شود.

الف) مصطفی برای این که دوست دارد تحت هر شرایطی امیر ببازد، با معین تبانی می‌کند و این دو سعی می‌کنند به نحوی بازی کنند که امیر ببازد. آیا این دو نفر می‌توانند طوری بازی کنند که امیر هرطور بازی کند بازنده باشد؟

ب) امیر که از این موضوع خبردار می‌شود، معین را راضی می‌کند که با او هم‌کاری کند. آیا امیر و معین می‌توانند طوری بازی کنند که مصطفی هرطور بازی کند بازنده باشد؟

در جست و جوی مصطفی.. ۲۰ امتیاز

۳- مصطفی بعد از این‌که متوجه شد معین، دوست صمیمی او، با امیر توطئه کرده است تا او را شکست بدهد، از ناراحتی سر به بیابان می‌گذارد. n نفر از دوستان مصطفی از این موضوع مطلع می‌شوند و به دنبال او به بیابان می‌روند تا او را پیدا کنند و برگردانند.

بیابان یک زمین مسطح است (زمین از هر چهار طرف نامتناهی) که افراد می‌توانند در مختصات صحیح آن حرکت کنند. مصطفی روی یکی از این نقاط پنهان شده و به‌علت ناراحتی بسیار، از جایش تکان نمی‌خورد. تنها کسی او را می‌بیند که دقیقا روی همان نقطه باشد.

این n نفر در نقاطی دلخواه از بیابان مستقر شده و هرکدام جهتی را انتخاب می‌کنند (بالا، پایین، چپ یا راست). پس از شروع، هرکدام در جهتی که انتخاب کرده حرکت می‌کند و هر ثانیه یک قدم بر می‌دارد (یک واحد حرکت می‌کند و به نقطه‌ی صحیح بعدی می‌رود).

اگر دو نفر از روبه‌رو، در یک نقطه‌ی صحیح به هم برخورد کنند، هردو جهت خود را به سمت راست خود تغییر می‌دهند (۹۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت) و در جهت جدید، حرکت خود را ادامه می‌دهند. دقت کنید اگر دو نفر از جهت دیگری به هم برسند یا بین دو نقطه‌ی صحیح با هم روبه‌رو شوند، از کنار هم عبور کرده و تغییر جهت نمی‌دهند.

آیا دوستان مصطفی همواره می‌توانند طوری در بیابان قرار گیرند و جهت‌های مناسبی انتخاب کنند، که حتما مصطفی را پیدا کنند؟

احترام به پدر.. ۲۰ امتیاز

۴- پس از این که تولد مصطفی به خوبی برگزار نشد، خانواده‌ی او تصمیم گرفتند یک جشن تولد مردانه با حضور جمعی از مردان خاندان برگزار کنند. n نفر از مردان خاندان (از جمله بزرگ خاندان) در جشن شرکت کردند و به طرز جالبی پدر هر فرد حاضر در جشن (به جز بزرگ خاندان)، در تولد حضور داشت.

گوییم فرد A جد فرد B است، اگر A یکی از افراد زیر باشد:

پدر B، پدر پدر B، پدر پدر پدر B، ...، بزرگ خاندان

به زیرمجموعه‌ای از افراد حاضر در جشن **سلسله‌ای** گوییم، اگر از هر دو عضو زیرمجموعه، یکی جد دیگری باشد و هم‌چنین به جز بزرگ‌ترین فرد زیرمجموعه، پدر هر فرد زیرمجموعه، در زیرمجموعه باشد.

در انتهای جشن مصطفی تصمیم گرفت برای یادگاری تعداد عکس تهیه کند. او برای این کار یک عکاس آورد. بزرگ خاندان به عکاس گفت که تنها از زیرمجموعه‌های سلسله‌ای افراد حاضر در جشن، عکس بگیرد. سپس عکاس گفت که عکاسی از هر زیرمجموعه‌ی سلسله‌ای S_i، هزینه‌ی T_i را دارد.

خاندان مصطفی بسیار خانواده دوست هستند و به پدر خود احترام می‌گذارند. بنابراین تصمیم گرفتند تعدادی عکس بگیرند، طوری که هر کس با پدر خود در دست کم دو عکس آمده باشد. مصطفی برآورد کرد کمینه‌ی هزینه‌ی ممکن برای این کار m واحد است. ثابت کنید افراد می‌توانند کار خود را با m واحد هزینه، طوری انجام دهند که از هر زیرمجموعه‌ی سلسله‌ای، صفر یا دو بار عکس گرفته شده باشد.